باسمه‌تعالی

بررسی تست‌های کنکور سراسری سال ۱۳۹۴ (رشته ریاضی)

(سری C - ۱۲۰)

(دروس ریاضی ۲، حسابان و حساب‌دیفرانسیل و انتگرال)

یوسف احمدی

همه‌ساله تستهای کنکور سراسری (درس ریاضی رشته ریاضی‌فیزیک) با اهداف زیر مورد بررسی، تجزیه و تحلیل و ارزیابی قرار می‌گیرند.

(۱) پاسخ تشریحی حتی‌الامکان با روشهای مختلف.

(۲) مطابقت آنها با مطالب، مفاهیم، مسائل، مثالها و نکات کتاب‌های درسی.

(۳) مطابقت آنها با تستهایی از کنکورهای سراسری سالهای قبل (از سال ۱۳۸۸ به بعد)

(۴) بررسی سطح دشواری تستها (ساده، نسبتاً ساده، متوسط، نسبتاً متوسط، بالای متوسط و دشوار)

(۵) توزیع تستها بین مطالب کتب با توجه به تنوع عناوین و اهمیت آنها در کتب درسی.

(۶) ترغیب دانش‌آموزان به آموزش مدرسه‌ای و پایبندی آنها به کتابهای درسی به همراه حل مسئله‌های بیشتر و درک عمیق‌تر مفاهیم.

---

۱۰۱)- جملات دنبالهٔ ... ، ۲/۳۹۹۹۹ ، ۲/۳۹۹۹ ، ۲/۳۹۹ ، ۲/۳۹ به یک عدد ثابت و گویا بسیار نزدیک می‌شود. جملهٔ دهم دنبالهٔ تفاضل آنها از این عدد ثابت کدام است؟

۱) $۱۰^{-۱۱}$ ۲) $۱۰^{-۱۰}$ ۳) $۱۰^{-۹}$ ۴) ۲×۱۰^{-۱۰}

* **حل :** گزینه ۱ صحیح است.

دانستن این نکته که $a/a_۱a_۲...a_n\bar{۹} = a/a_۱a_۲.a_{n-۱}(a_n+۱)$ سبب تسهیل در حل تست خواهد شد پس $۲/۳\bar{۹} = ۲/۴$
در نتیجه دنباله تفاضلات عبارتست از $d_۱ = ۰/۰۱$ و $d_۲ = ۰/۰۰۱$ و $d_۳ = ۰/۰۰۰۱$ و... که دنباله‌ای هندسی است با جمله اول $d_۱ = ۰/۰۱$ و قدرنسبت $d = ۰/۱$ در نتیجه $d_{۱۰} = d_۱q^۹ = ۰/۰۱ \times (۰/۱)^۹ = (۰/۱)^{۱۱} = ۱۰^{-۱۱}$
این تست تلفیقی است از ریاضی ۲ و حسابان، آنجا که حد مجموع جملات مطرح است یعنی تبدیل عدد اعشاری متناوب مرکب به کسر متعارفی مولد آن، مربوط به حسابان است و آنجا که باید جمله دهم یک دنباله حسابی را به دست آورد مربوط به ریاضی۲ می‌باشد. و مشابه مسأله ۱ صفحه ۱۶ ریاضی ۲ و تست در سطح دشواری متوسط قرار دارد.

---

۱۰۲)- تابع $f(x) = \log_۳(ax+b)$ فقط برای مقادیر $x \in (-\frac{۱}{۲}, +\infty)$ بامعنی است. اگر $f(۴) = ۲$ باشد، آنگاه $f(-\frac{۴}{۹})$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

❊ **حل:**

گزینه ۱ صحیح است.

چون در دامنه، $x \to +\infty$ در نتیجه الزاماً $a > 0$ که با این شرط ، $D_f = (-\frac{b}{a}, +\infty)$ یا $-\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}$ یعنی $b = 2a$ و

چون $f(4) = 2$ در نتیجه $4a + b = 9$ و بنابراین $a = 2$ و $b = 1$ در نتیجه $f(-\frac{4}{9}) = \log_{3} \frac{1}{9} = -2$

این تست مربوط به درس توابع نمایی و لگاریتمی از ریاضی ۲ می‌باشد و تست در سطح متوسط قرار دارد.

---

۱۰۳)- مساحت مثلثی با دو ضلع ۱۶ و ۹ واحد، برابر $24\sqrt{5}$ واحد مربع است. بزرگترین ضلع این مثلث کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۲ ۳) ۲۳ ۴) ۲۴

❊ **حل:** گزینه ۳ صحیح است.

روش اول: با توجه به $S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$ داریم: $S = \frac{1}{2} \times 9 \times 16 \sin\alpha \Rightarrow 24\sqrt{5} = 72\sin\alpha$ در نتیجه:

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{2}{3} \Rightarrow x^2 = 16^2 + 9^2 - 2 \times 16 \times 9 \times \cos\alpha$$ (قانون کسینوسها)

$$\Rightarrow x^2 = 529 \Rightarrow x = 23$$

روش دوم: با استفاده از دستور هرون برای محاسبه مساحت مثلث

فرض کنیم ضلع بزرگتر x باشد پس $P = \frac{16 + 9 + x}{2} = \frac{x + 25}{2}$ در نتیجه:

$$S = \sqrt{P(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow 24\sqrt{5} = \sqrt{(\frac{x+25}{2})(\frac{25-x}{2})(\frac{x+7}{2})(\frac{x-7}{2})}$$

$$\Rightarrow 96\sqrt{5} = \sqrt{(625 - x^2)(x^2 - 49)}$$

که با توجه به گزینه‌ها فقط ۲۳ در آن صدق می‌کند. و یا می‌توانیم با مربع نمودن طرفین معادله دو مجذوری حل نمائیم.

مربوط به درس ریاضی ۲ (فصل ۵)- مثلثات و تست کمی بالاتر از سطح متوسط قرار دارد. (با حجم عملیات بالا)

---

۱۰۴)- با ارقام ۹ ، . . . ، ۳ ، ۲ ، ۱ ، به چند طریق می‌توان یک عدد پنج‌رقمی ساخت، به طوری که درست ۲ رقم آن زوج باشد؟

۱) ۶۴۰۰ ۲) ۷۲۰۰ ۳) ۸۴۰۰ ۴) ۹۶۰۰

❊ **حل:** گزینه ۲ صحیح است.

در این تست منظور طراح «ارقام متمایز» است.

روش اول: $$\binom{4}{2} \times \binom{5}{3} \times 5! = 6 \times 10 \times 120 = 7200$$

که در آن ! ۵ برابر است با تعداد جابجایی ۵ رقم متمایز و $\binom{5}{3}$ تعداد حالات انتخاب فردها و $\binom{4}{2}$ تعداد حالات انتخاب زوج‌هاست.

روش دوم:

اگر به صورت مقابل خانه‌بندی کنیم:

زوج	زوج	فرد	فرد	فرد

به $720 = 3 \times 4 \times 5 \times 3 \times 4$ طریق می‌توان به صورت فوق خانه‌ها را پُر نمود.

اما برای زوجها $\binom{5}{2}=10$ انتخاب داریم که در این صورت خانه‌های مربوط به فردها به صورت منحصر به فرد تعیین می‌شوند در نتیجه تعداد کل برابر است با : $10 \times 720 = 7200$ مربوط به درس ریاضی (۲) فصل ۷ (ترکیبیات) که از اصل ضرب و تبدیل و ترکیب استفاده شده است و تست در سطح بالای متوسط قرار دارد.

---

۱۰۵)- تعداد جملات یک دنبالهٔ هندسی عدد زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدرنسبت آن کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

❊ **حل:** گزینه ۳ صحیح است.

روش اوّل: تعداد جملات کل برابر با $2n$ در نتیجه تعداد جملات ردیف فرد مساوی n است و اگر قدرنسبت کل برابر با q باشد، قدرنسبت ردیف‌های فرد برابر q^2 است، در نتیجه با توجه به مجموع جملات دنباله‌های هندسی داریم:

$$\frac{t_1(1-q^{2n})}{1-q} = 3 \times \frac{t_1(1-(q^2)^n)}{\underbrace{1-q^2}_{(1-q)(1+q)}} \Rightarrow 1+q=3 \Rightarrow q=2$$

روش دوم: چون تست است و گزینه‌ها اعدادی ثابت هستند پس تست برای حالتی که ۲ جمله درنظر بگیریم نیز صادق است یعنی:

$$\frac{t_1+t_2}{t_1}=3 \Rightarrow \frac{t_1+t_1q}{t_1}=3 \Rightarrow 1+q=3 \Rightarrow q=2$$

مربوط به درس فصل اول حسابان است. و تست در سطح متوسط قرار دارد.

---

۱۰۶)- به ازای مقداری از a چندجمله‌ای $f(x)=x^4+ax^3-8x$ بر $x+2$ بخش‌پذیر است. کوچکترین ریشه معادلهٔ $f(x)=0$ کدام است؟

۱) $1-\sqrt{3}$ ۲) $1-\sqrt{5}$ ۳) $-1-\sqrt{3}$ ۴) $-1-\sqrt{5}$

❊ **حل:** گزینه ۴ صحیح است.

از $x+2=0$ نتیجه می‌شود $x=-2$ در نتیجه $f(-2)=0$ که به دست می‌آید. $a=4$ پس:

$$f(x)=x^4+4x^3-6x=x(x^3+4x^2-8)=$$
$$=x(x+2)(x^2+2x-4)=0 \Rightarrow x=0\ ,\ x=-2\ ,\ x^2+2x-4=0$$
$$x=-1\pm\sqrt{5} \Rightarrow \text{کوچکترین ریشه } =-1-\sqrt{5}$$

این تست مربوط به درس حسابان بحث «بخش‌پذیری و تقسیم در چندجمله‌ای‌ها» از فصل اول می‌باشد.
و تست در سطح بالای متوسط قرار دارد.

---

۱۰۷)- حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x^2+4x+3=\sqrt{x^2+4x+5}$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

* **حل:** گزینه ۲ صحیح است.

با انتخاب مجهول معاون مناسب این تست قابل حل است.

کافی است $\sqrt{x^۲+۴x+۵}=A$ یعنی $x^۲+۴x+۳=A^۲-۲$

در نتیجه: $A^۲-۲=A$ یا $A^۲-A-۲=۰$ که در این صورت ۱- یا $A=۲$

یعنی $\sqrt{x^۲+۶x+۵}=۲$ یا $x^۲+۴x+۱=۰$ که با توجه به روابط بین ضرائب و ریشه‌های درجه دوم

داریم: $\alpha\beta=\frac{c}{a}=۱$

مربوط به درس حسابان قسمت «حل معادلات رادیکالی» از فصل اول

و تست در سطح بالای متوسط قرار دارد با حجم عملیاتی نسبتاً زیاد.

---

۱۰۸)- نمودار تابع $y=|۲x-۶|-|x+۴|+x$ در یک بازه اکیداً نزولی است. ضابطهٔ معکوس آن در این بازه کدام است؟

۱) $-x+۶;x<-۴$ ۲) $-x+۵;x>۲$ ۳) $-\frac{۱}{۲}x+۱;-۴<x<۳$ ۴) $-\frac{۱}{۲}x+۱;-۴<x<۱۰$

* **حل:** گزینه ۴ صحیح است.

این یک تابع سه ضابطه‌ای است که ضابطه‌ها درجه اول هستند، کافی است ضابطه‌ای که در آن ضریب x منفی باشد را درنظر بگیریم.

که در این صورت $-۴<x<۳$ $y=f(x)=-۲x+۲$ در نتیجه:

$$f^{-۱}(x)=-\frac{x+۲}{۲}=-\frac{x}{۲}-۱ \qquad -۴<x<۱۰$$

مربوط به درس حسابان فصل دوم «معکوس‌پذیری و تابع معکوس» و تست در سطح متوسط قرار دارد.

---

۱۰۹)- جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin x+\sin ۲x}{\cos x+\cos ۲x}=\cot x$ ، کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{۵}$ ۲) $\frac{۲k\pi}{۵}$ ۳) $\frac{۳k\pi}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}(۲k+۱)\pi$

***حل:** منظور طراح گزینه ۴ است.

قبل از اینکه به سراغ روشهای مختلف برای حلّ این تست برویم لازم است این نکته را متذکر شویم که همواره جوابها باید در دامنه متغیر باشند، متأسفانه هیچکدام از گزینه‌ها در دامنه متغیر قرار ندارند زیرا اگر $k=۰$ آنگاه گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ در دامنه قرار ندارند و اگر $k=۲$ آنگاه گزینه ۴ در دامنه قرار ندارد، پس گزینه‌های تست همگی دارای اشکال هستند.

امّا روشهای حل این تست:

روش اول: صورت و مخرج را به ضرب تبدیل می‌کنیم یعنی:

$$\frac{۲\sin\frac{۳x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}{۲\cos\frac{۳x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}=\tan(\frac{\pi}{۲}-x)\Rightarrow\tan\frac{۳}{۲}x=\tan(\frac{\pi}{۲}-x)$$

$$\Rightarrow\frac{۳}{۲}x=k\pi+\frac{\pi}{۲}-x\Rightarrow\frac{۵}{۲}x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=(۲k+۱)\frac{\pi}{۵} \qquad (k\in Z)$$

که منظور طراح گزینه ۴ است که از این دسته جواب باید ریشه‌های معادلات $\sin x=۰$ و $\cos x+\cos ۲x=۰$ را کنار بگذاریم.

روش دوم:

$$\frac{\sin x+\sin ۲x}{\cos x+\cos ۲x}=\frac{\cos x}{\sin x}\Rightarrow \sin^{۲} x+\sin ۲x\sin x=\cos^{۲} x+\cos x\cos ۲x$$

$$\Rightarrow \sin^{۲} x-\cos^{۲} x=\underbrace{\cos ۲x\cos x-\sin ۲x\sin x}_{\cos(۳x)}\ \Rightarrow -\cos ۲x=\cos ۳x$$

$$\Rightarrow \cos ۳x=\cos(\pi-۲x)\Rightarrow ۳x=۲k\pi\pm(\pi-۲x)$$

$$\Rightarrow x=\frac{(۲k-۱)\pi}{۵}\quad \text{یا}\quad x=(۲k-۱)\pi$$

که $\pi(۲k-۱)$ جزیی از $(۲k-۱)\frac{\pi}{۵}$ است پس $x=\frac{(۲k-۱)\pi}{۵}$ $(k\in Z)$

اگرچه بسیاری از دانش‌آموزان با رد گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ به زعم طراحان تست جواب درستی داده‌اند اما با توجه به توضیحات قبل برای حلّ تست به عملیات نسبتاً طولانی نیاز است.

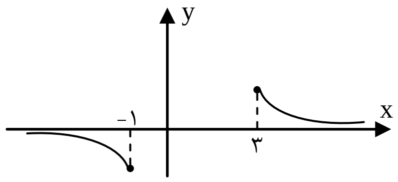
تست مربوط به حلّ معادلات مثلثاتی (فصل ۳) از کتاب حسابان می‌باشد و تست در سطح بالای متوسط قرار دارد.

---

۱۱۰)- شکل روبرو، نمودار تابع $y=\sin^{-۱}(U(x))$ است. ضابطهٔ $U(x)$ ، به کدام صورت است؟

۱) $\frac{۲}{x-۱}$ ۲) $\frac{۲}{۱-x}$

۳) $\frac{۱}{x-۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲-x}$



❊ **حل:** گزینه ۱ صحیح است.

چون $\sin^{-۱}$ اکیداً صعودی و نمودار در فاصله‌های پیوسته اکیداً نزولی است پس تابع u باید در فاصله‌های پیوسته اکیداً نزولی باشد که گزینه‌های ۱ یا ۳ قابل قبولند و چون $-۱\le u(x)\le ۱$ پس وقتی x = ۳ باید u(x) = ۱ و وقتی x = -۱ ، u(x) = -۱ که گزینه ۱ صحیح است.

تست مربوط به درس توابع معکوس مثلثاتی از فصل سوم حسابان بوده و در سطح متوسط قرار دارد.

---

۱۱۱)- حاصل عبارت $۱۶۹\sin(۲\cos^{-۱}(-\frac{۵}{۱۳}))$ ، کدام است؟

۱) ۱۲۰- ۲) ۶۰ ۳) ۶۰- ۴) ۱۲۰

❊**حل:** گزینه ۱ صحیح است.

روش اول:

با استفاده از فرمولهای $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$ و $\cos(\cos^{-۱}x)=x$ و $\sin(\cos^{-۱}x)=\sqrt{۱-x^{۲}}$ داریم:

$$۱۶۹\sin(۲\cos^{-۱}(-\frac{۵}{۱۳}))=۱۶۹\times ۲\sin\cos^{-۱}(-\frac{۵}{۱۳})\times\cos(\cos^{-۱}\frac{-۵}{۱۳})$$

$$=۱۶۹\times ۲\times\sqrt{۱-\frac{۲۵}{۱۶۹}}\times(-\frac{۵}{۳})=۱۶۹\times ۲\times\frac{۱۲}{۱۳}\times-\frac{۵}{۱۳}=-۱۲۰$$

روش دوم (روش تقریبی):

$$\cos^{-1}(-\frac{۵}{۱۳})=\pi-\cos^{-1}\frac{۵}{۱۳}$$
$$\approx\pi-\cos^{-1}۰/۴ \quad , \quad \cos^{-1}۰/۴\approx ۷۰^\circ$$

در نتیجه $\pi-\cos^{-1}\frac{۵}{۱۳}$ تقریباً ˚۱۱۰ و دوبرابر آن تقریباً ˚۲۲۰ و سینوس آن تقریباً $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است.

بنابراین $۱۶۹\times(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})$ به ۱۲۰- خیلی نزدیکتر است تا به ۶۰- .

مربوط به درس توابع معکوس مثلثاتی از فصل سوم حسابان است. و تست در سطح متوسط قرار دارد.

---

۱۱۲)- به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{a(۱+\sqrt[۳]{۱-x})}{x^۲-۲x} & ; x>۲\\ -a & ; x\le ۲\end{cases}$ **همواره پیوسته است؟**

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۶ ۳) ۲/۴ ۴) ۳/۲

***حل:** گزینه ۳ صحیح است.

چون همواره پیوسته است پس در x = ۲ نیز پیوسته می‌باشد. یعنی:

$$f(۲)=۲-a\ ,\ \lim_{x\to ۲^-}f(x)=۲-a\ ,\ \lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim\frac{a(۱+\sqrt[۳]{۱-x})}{x^۲-۲x}$$

که این حد را هم می‌توانیم با استفاده از هوپیتال و هم با استفاده از معادل‌سازی و هم، هم‌ارزی حل نمائیم. ابتدا با استفاده از هوپیتال:

$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)\overset{Hop}{=}\lim_{x\to ۲^+}\frac{a\left(\frac{-۱}{۳\sqrt[۳]{(۱-x)^۲}}\right)}{۲x-۲}=\frac{-\frac{a}{۳}}{۲}=-\frac{a}{۶}\Rightarrow ۲-a=-\frac{a}{۶}$$
$$\Rightarrow a=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴$$

حال با استفاده از معادل‌سازی:

$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{a(\overbrace{۱+(۱-x)}^{۲-x})}{x(x-۲)(۱+\sqrt[۳]{(۱-x)^۲}-\sqrt[۳]{۱-x})}=-\frac{a}{۶}$$

با استفاده از هم‌ارزی:

$$\sqrt[n]{۱+ax}\underset{x\to ۰}{\simeq}۱+\frac{a}{n}x$$ می‌دانیم که:

$$\Rightarrow \sqrt[۳]{۱-x}\underset{x\to ۲}{\sim}-\sqrt[۳]{x-۱}\sim-\sqrt[۳]{۱+(x-۲)}\underset{x\to ۲}{\sim}-(۱+\frac{۱}{۳}(x-۲))$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{a(۱+(-۱-\frac{۱}{۳}(x-۲))}{x(x-۲)}=-\frac{a}{۶}$$

و تست مربوط به درس حسابان یا حساب دیفرانسیل و انتگرال (فصل حد و پیوستگی) می‌باشد.

و در سطح متوسط قرار دارد.

۱۱۳)- حدّ دنبالهٔ $a_n=\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{2n+3}$ **وقتی** $n\to\infty$ **، کدام است؟**

۱) $2e$ ۲) e^2 ۳) $3e$ ۴) $3e^2$

* **حل:** گزینه <u>۲</u> صحیح است.

<u>**روش اول:**</u> (روش کتاب درسی): با استفاده از $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$ یا $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

$$a_n=(\frac{n+2}{n+1})^{2n+3}=(1+\frac{1}{n+1})^{2(n+1)+1}=(1+\frac{1}{n+1})^{2(n+1)}\times(1+\frac{1}{n+1})$$

$$=\left((1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\right)^2\times(1+\frac{1}{n+1})\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=e^2\times1=e^2$$

<u>**روش دوم:**</u> بطور کلی اگر $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$ آنگاه

$$\lim_{x\to\infty}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to\infty}e^{g(x)\operatorname{Ln}f(x)}=\lim_{x\to\infty}e^{g(x)(f(x)-1)}$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}(\frac{n+2}{n+1})^{2n+3}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(2n+3)(\frac{n+2}{n+1}-1)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+1}}=e^2$$

مربوط به درس حساب دیفرانسیل و انتگرال (فصل اول). و تست کمی پائین‌تر از سطح متوسط قرار دارد.

---

۱۱۴)- حاصل $\lim\limits_{x\to0}(\ \ 2x\ \ +\ \ -2x\ \ )\dfrac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}}$ **کدام است؟ (نماد جزء صحیح است.)**

۱) ۳- ۲) ۳ ۳) صفر ۴) حدّ ندارد.

* **حل:** گزینه <u>۲</u> صحیح است.

در حالت کلی :

$\lim\limits_{x\to k}([x]+[-x])=-1$ در نتیجه وقتی $x\to0$ آنگاه $2x\to0$ و بنابراین $\lim\limits_{x\to0}([2x]+[-2x])=-1$ پس باید

$\lim\dfrac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}}$ را بدست آوریم که روشهای مختلفی وجود دارد.

<u>**روش اول:**</u> (معادل‌سازی و استفاده از قضیه $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=0$) که روش کتاب درسی است.

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)(1+\sqrt{1+x^2})}{(1-\sqrt{1+x^2})(1+\sqrt{1+x^2})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}\times3\times2}{-x^2}=-2\times\frac{1}{4}\times3\times2=-3$$

<u>**روش دوم:**</u> استفاده از قاعده هوپیتال:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{3\cancel{\sin x}\cos^2 x}{-\cancel{2x}}\times2\sqrt{1+x^2}=\frac{3\times2}{-2}=-3$$

روش سوم: استفاده از هم‌ارزی: $x \to 0 \Rightarrow \sqrt{1+x^2} \sim 1+\frac{1}{2}x^2$ ، $x \to 0 \Rightarrow 1-\cos^n ax \sim n a^2 \frac{x^2}{2}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{3\times\frac{x^2}{2}}{1-(1+\frac{1}{2}x^2)} = -3$$

مربوط به فصل حد و پیوستگی دروس حسابان و حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌باشد.
و تست در سطح متوسط قرار دارد.

---

۱۱۵)- یکی از ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x^3+2x^2-4x-3=0$ در کدام بازه است؟

۱) $(-\frac{3}{4},-\frac{1}{2})$ ۲) $(-1,-\frac{3}{4})$ ۳) $(-\frac{1}{2},0)$ ۴) $(0,\frac{1}{2})$

***حل:** گزینه ۳ صحیح است.

بنا به قضیه بولزانو چون تابع $f(x)=x^3+2x^2-4x-3$ پیوسته است چنانچه $f(a)f(b)<0$ آنگاه معادله $f(x)=0$ در بازه (a,b) دارای ریشه است.

x	-۱	$-\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$
f(x)	+	+	-	

که با توجه به جدول مقابل داریم : $f(-\frac{1}{2})\times f(0)<0$

مربوط به درس (قضیه بولزانو و مقدار میانی در توابع پیوسته) از کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال سال چهارم.
و تست در سطح متوسط قرار دارد.

---

۱۱۶)- امتداد مجانب‌های نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}$ ، نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را در دو نقطه A و B قطع می‌کند. اندازهٔ AB کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) ۴ ۳) $2\sqrt{5}$ ۴) $4\sqrt{2}$

*** حل:** گزینه ۴ صحیح است.

با استفاده از هم‌ارزی در بی‌نهایت می‌توانیم مجانب‌های f را به سادگی به دست آوریم.

$$x\to\infty \Rightarrow f \sim |x+1|-|x-1|$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x\to+\infty \Rightarrow y=2 & \Rightarrow A\left|\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right. \\ x\to-\infty \Rightarrow y=-2 & \Rightarrow B\left|\begin{matrix}-2\\-2\end{matrix}\right. \end{cases}$$

که A و B نقاط تلاقی مجانب‌ها با خط y = x هستند در نتیجه

$$AB=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$$

ضمنا با معادل سازی نیز می توانیم مجانب های f را بدست آوریم .
مربوط به درس مجانب‌های افقی از کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال (فصل ۲) می‌باشد.
و تست در سطح بالای متوسط قرار دارد.

---

۱۱۷)- اگر θ زاویهٔ بین مماس چپ و مماس راست، نمودار تابع با ضـابطهٔ $f(x)=[x+\frac{1}{2}]x+x^{2}$ ، در نقطـهٔ $x=\frac{1}{2}$ باشد، $\tan\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

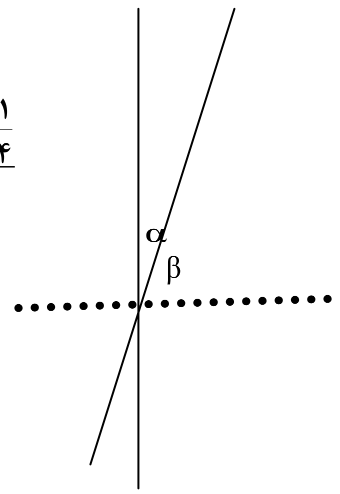
*** حل:** به زعم طراحان گزینه ۲ صحیح است.

این تابع در $x=\frac{1}{2}$ پیوسته نیست پس برای به دست آوردن شیبهای مماسها باید مشـتق‌هـای چـپ و راسـت در $x=\frac{1}{2}$ را بـا استفاده از تعریف به دست آوریم. یعنی:

$$f'_{+}(\tfrac{1}{2})=\lim_{x\to\frac{1}{2}^{+}}\frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^{+}}\frac{[x+\frac{1}{2}]x+x^{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{x-\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{2}^{+}}\frac{(x-\frac{1}{2})+(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}=2 \quad , \quad f'_{-}(\tfrac{1}{2})=\lim_{x\to\frac{1}{2}^{-}}\frac{[x+\frac{1}{2}]x+x^{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{x-\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{2}^{-}}\frac{x^{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{x-\frac{1}{2}}=+\infty$$



$$\Rightarrow \tan\alpha=\tan(\frac{\pi}{2}-\beta)=\cot\beta=\frac{1}{2}$$

که در گزینه‌ها وجود ندارد. پ س این تست به علت نداشتن گزینه صحیح، اشکال دارد.

شاید منظور طراحان راه‌حل زیر باشد که منطقی نیست و اصلاً راه‌حل به حساب نمی‌آید.

در همسایگی $x=\frac{1}{2}$ داریم:
$$f(x)=\begin{cases} x+x^{2} & \frac{1}{2}\le x<1 \\ x^{2} & 0<x<\frac{1}{2}\end{cases}$$

در نتیجه اینگونه تصور کردند که $f'_{+}(\frac{1}{2})=2 \quad , \quad f'_{-}(\frac{1}{2})=1$ (یعنی از روی ضابطه‌ها مشتق گرفتند.)

در نتیجه $\tan\alpha=\frac{2-1}{1+2}=\frac{1}{3}$ که گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

تست مربوط به درس مشتق‌های چپ و راست و زاویه بین مماسها از کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال (فصل ۳) مـی‌باشـد. و در سطح بالای متوسط قرار دارد.

---

۱۱۸)- از رابطهٔ $x^{2}y-y^{2}-2\sqrt{x}+4=0$ ، مقدار $\frac{d^{2}y}{dx^{2}}$ در نقطهٔ (۲ ، ۱) کدام است؟

۱) $\frac{7}{6}$ ۲) $\frac{8}{6}$ ۳) $\frac{11}{6}$ ۴) $\frac{13}{6}$

***حل:** گزینه ۴ صحیح است.

<u>راه‌حل اول:</u> $\frac{d^2y}{dx^2}$ همان مشتق مرتبه دوم y نسبت به x است. و چون ضمنی است می‌توانیم (مطابق معمول) دوبار از طرفین مشتق بگیریم با فرض اینکه y تابع و x متغیر باشد.

$$2xy+y'x^2-2y'y-\frac{1}{\sqrt{x}}=0 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow 2y+2xy'+y''x^2+2xy'-2y''y-2y'^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0 \qquad (2)$$

$$(1)\xrightarrow[x=1\ ,\ y=2]{(1,2)} 4+y'-4y'-1=0 \Rightarrow y'=1$$

$$(2)\xrightarrow{y'=1} 4+2+y''+\cancel{2}-4y''-\cancel{2}+\frac{1}{2}=0$$

$$\Rightarrow y''=\frac{13}{6}$$

<u>راه‌حل دوم:</u> می‌توانیم مشتق اول را از دستور $y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}$ به دست آوریم که در این صورت داریم: $y'=-\frac{2xy-\frac{1}{\sqrt{x}}}{x^2-2y}$ و چون x متغیر مستقل و y و y' وابسته به x هستند پس در مشتق بعدی یا باید طرفین، وسطین نمائیم یا از فرمول مشتق توابع کسری استفاده نمائیم. که نسبت به راه‌حل اولی برتری ندارد و طولانی‌تر است.

مربوط به درس مشتق‌گیری ضمنی از کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال سال چهارم (فصل ۳) می‌باشد. و تست در سطح دشواری قرار دارد.

---

۱۱۹)- اگر $f(x)=x^3-x^2+2x$ باشد، معادلهٔ خط قائم بر منحنی تابع f^{-1} ، در نقطهٔ ۲ = x واقع بر آن کدام است؟

۱) $y+3x=7$ ۲) $y-3x=-5$ ۳) $3y+x=5$ ۴) $3y-x=1$

***حل:** گزینه <u>۱</u> صحیح است.

<u>راه‌حل اول:</u>

نقطه‌ای به طول <u>۲</u> واقع بر f^{-1} می‌شود نقطه‌ای به عرض <u>۲</u> واقع بر f یعنی $2=x^3-x^2+2x$ که به سادگی نتیجه می‌شود x=۱ و چون $f'=3x^2+2x+2>0$ ، f اکیداً صعودی ، پس جواب منحصر به فرد است و

$(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{3} \rightarrow$ شیب قائم = ۳-

$$\Rightarrow y-1=-3(x-2)\Rightarrow y=-3x+7$$

<u>راه‌حل دوم:</u>

f اکیداً صعودی است پس f^{-1} نیز اکیداً صعودی و بنابراین شیب مماس مثبت و در نتیجه شیب قائم منفی است پس گزینهٔ <u>۱</u> یا <u>۳</u> صحیح‌اند و چون $f'(1)=3$ پس ۳- = شیب قائم بر f^{-1} در نتیجه گزینه <u>۱</u> صحیح است.

مربوط به درس مشتق تابع معکوس از کتابهای حسابان و حساب دیفرانسیل و انتگرال (فصل ۳).

و تست در سطح بالای متوسط قرار دارد.

---

۱۲۰)- نمودار تابع $y=|x|e^{-x}$ ، در کدام بازه نزولی و تقعّر آن روبه پایین است؟

۱) $(-\infty,2)$ ۲) $(0,1)$ ۳) $(1,2)$ ۴) $(2,+\infty)$

❊ **حل:** گزینه ۳ صحیح است.

چون تابع در $x=0$ زاویه‌دار است پس خط مماس وجود ندارد پس f در $x=0$ عطف ندارد. کافی است فقط حالتی که $x>0$ بررسی شود (اگر x قرینه شود تابع مشتق و مشتق ثانی نیز قرینه می‌شوند و در ریشه‌های آنها بی‌اثر است.)

$$x>0 \to y \subset xe^{-x} \to y' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x} < 0 \Rightarrow x>1$$

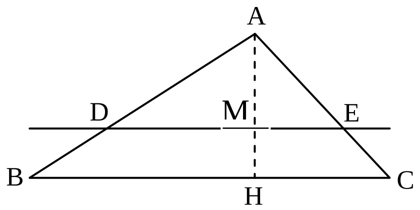
$$y'' = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = e^{-x}(-1-1+x) = (x-2)e^{-x} < 0 \Rightarrow x<2$$

$$\Rightarrow 1<x<2$$

مربوط به درس تعیین جهت تغییرات و سوی تقعر از کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال (فصل ۳)
و تست در سطح دشواری قرار دارد.

---

۱۲۱)– در مثلث ABC ضلع ۲۰ = BC و ارتفاع ۱۲ = AH واحد است. خط Δ موازی BC با سرعت ثابت ۰/۲ واحد در ثانیه از آن دور می‌شود. سرعت افزایش مساحت ذوزنقه در لحظه‌ای که فاصله دو خط موازی ۹ واحد باشد کدام است؟



۱) ۰/۸ ۲) ۰/۹

۳) ۱ ۴) ۱/۲

گزینه ۳ صحیح است.

راه‌حل اول: فرض کنیم $MH = x$ و $DE = y$

$$S_{DECB} = \frac{1}{2}(BC+DE)\times HM$$

$$= \frac{1}{2}(20+y)\times x$$

اما $\frac{AH}{AM} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow \frac{\cancel{12}^{\,3}}{12-x} = \frac{\cancel{20}^{\,5}}{y}$ در نتیجه $y = 20 - \frac{5}{3}x$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}(40-\frac{5}{3}x)x = \frac{1}{2}(40x - \frac{5}{3}x^2)$$

$$\Rightarrow S' = \frac{1}{2}(40x' - \frac{10}{3}xx') \Rightarrow S' = \frac{1}{2}(40\times 0/2 - \frac{10}{3}\times 9\times 0/2)$$

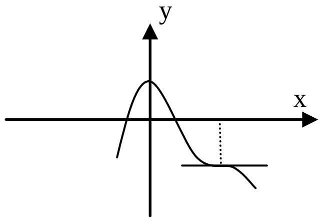
$$= \frac{1}{2}(8-6) = 1$$

راه‌حل دوم: که ساده‌تر است. کافی است سرعت کاهش مساحت مثلث ADE را محاسبه کنیم و سرعت کاهش AH نیز مساوی ۰/۲ است. $(AM=h) \quad S_{ADE} = \frac{1}{2}\times h\times y$

اما $\frac{h}{y} = \frac{12}{20}$ یعنی $y = \frac{5}{3}h$

$$\Rightarrow S_{ADE} = \frac{1}{2}\times\frac{5}{3}h^2 = \frac{5}{6}h^2 \Rightarrow S' = \frac{5}{6}\times 2\times h\times h' = \frac{5}{3}\times 3\times 0/2 = 1$$

مربوط به درس کمیت‌های وابسته از کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال سال چهارم (فصل ۳) است. و تست از سطح دشواری بالایی برخوردار است.



۱۲۲)- شکل روبرو، نمودار تابع با ضابطه   است، a کدام است؟

۱) ۱۸-   ۲) ۱۵-
۳) ۱۲-   ۴) ۹-

***حل:** گزینه ۱ صحیح است.

$f'=۰\Rightarrow ۲x(-۲x^۲+۱۲x+a)=۰$ و $f'(x)=-۴x^۳+۲۴x^۲+۲ax$ یک ریشه $x=۰$ است که در $x=۰$ با توجه به شکل دارای ماکزیمم نسبی است و چون در نقطهٔ عطف مماس بر f افقی است پس در این نقطه، مشتق ریشه مضاعف دارد یعنی $\Delta'_{f'}=۰$
در نتیجه $۳۶+۲a=۰\Rightarrow a=-۱۸$ که گزینه ۱ صحیح است.

مربوط به درس کاربردهای مشتق و رسم نمودارها از کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال. و تست در سطح دشواری قرار دارد.

---

۱۲۳)- اگر $G(x)=x^۲\int_۲^{\sqrt{x}}\frac{In(t+۲)}{t^۲}dt$ **باشد ،** $G'(۴)$ **چند برابر** $In_۲$ **است؟**

۱) ۱   ۲) ۱/۵   ۳) ۲   ۴) ۳

***حل:** گزینه ۳ صحیح است. بنابه قضیه اول بنیادی

$$G'(x)=۲x\int_۲^{\sqrt{x}}\frac{Ln(t+۲)}{t}dt+x^۲\times\frac{Ln(\sqrt{x}+۲)}{x}\times\frac{l}{۲\sqrt{x}}$$

و چون $\int_a^a f(x)dx=۰$ داریم:

$$G'(۴)=۱۶\times\frac{Ln۴}{۴}\times\frac{۱}{۴}=۲Ln_۲$$

مربوط به درس انتگرالها (قضایای بنیادی) از کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال است و تست در سطح بالای متوسط قرار دارد.

---

۱۲۴)- حاصل انتگرال $\int_۰^۴[\frac{x}{۲}]\frac{\sqrt{x}-۱}{x}dx$ **، کدام است؟**

۱) $۴-۲\sqrt{۲}-\ln۲$ ۲) $۴-۲\sqrt{۲}+\ln۲$ ۳) $۲+\sqrt{۲}-\ln۲$ ۴) $۲-\sqrt{۲}+\ln۲$

*** حل:** گزینه ۱ صحیح است.

چون $۰\le x\le ۴$ در نتیجه ۱ یا $[\frac{x}{۲}]=۰$ و فقط حالتی که $[\frac{x}{۲}]=۱$ یعنی $۲\le x<۴$ بررسی می‌شود. داریم:

$$\int_۰^۴[\frac{x}{۲}]\frac{\sqrt{x}-۱}{x}dx=\int_۲^۴(\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{۱}{x})dx=\int_۲^۴(\frac{۱}{\sqrt{x}}-\frac{۱}{x})dx$$

$$=۲\sqrt{x}-Lnx\Big|_۲^۴=۴-۲\sqrt{۲}-Ln۲\rightarrow$$

مربوط به درس انتگرال معین از کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال سال چهارم و تست در حدّ بالای متوسط قرار دارد.

در پایان لازم است مطالب زیر را متذکر شویم:

۱- توزیع تستها نسبتاً مناسب بوده است به استثنای یک مورد «طرح دو تست از توابع معکوس مثلثاتی».

۲- متاسفانه تست های به شماره های ۱۰۹ و ۱۱۷ دارای اشکال فنی هستند .

۳- متأسفانه در بین تستهای ریاضی ۲ ، حسابان و حساب‌دیفرانسیل و انتگرال نمی‌توان با قاطعیت گفت که تستی ساده است.

۴- با توجه به آمار سازمان سنجش (پیک سنجش) قریب به ۴۰ درصد دانش‌آموزان رشته ریاضی، درصد پاسخگویی به درس ریاضی صفر یا منفی بوده است و قریب به ۶۸ درصد، زیر ۱۰ درصد پاسخ دادند و فقط یک نفر توانسته است بالای ۹۰ درصد جواب بدهد که مؤید سطح دشواری سؤالات می‌باشد.

۵- تستها غالباً دارای حجم عملیاتی بالا بوده و چه بسا درک مفاهیم و تشخیص راه‌حل را تحت تأثیر قرار داده‌اند.

۶- تقریباً هیچ دانش‌آموزی از آزمون ریاضی و میزان پاسخگویی به آن راضی نبوده است و این پیامدهای منفی متعدد و به خصوص عدم اعتماد به نفس را به دنبال دارد.

۷- کنار گذاشتن بعضی از درسها یا فصولی از آنها توسط تعداد زیادی از دانش‌آموزان تا حدّ زیادی معلول سخت‌گیریهای بیش از متعارف است.

۸- متأسفانه مسئولین سازمان سنجش جواب قانع‌کننده‌ای به سخت‌گیریهای بیش از استاندارد نمی‌دهند و فقط به جملهٔ **«اگر سخت است برای همه است»** اکتفا نموده که این به معنای عدم احساس مسئولیت و به نوعی سخت‌گیری کور و بی‌هدف تلقی می‌شود.

پایان

یوسف احمدی